Soluzioni del Tutorato di Statistica 1 del 04/10/2010
Docente: Prof.ssa Enza Orlandi
Tutore: Dott.ssa Barbara De Cicco

Esercizio 1.
La funzione di densità congiunta di X e Y, è data da:
$f_{X,Y}(x,y) = 8xy$ per $0 < x < y < 1$, e vale 0 altrimenti.

1. Trovare $E[Y|X = x]$.
   $E[Y|X = x] = \int_{-\infty}^{+\infty} y f_{Y|X}(y|x)dy$
   $f_{Y|X}(y|x) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)}$
   $f_X(x) = \int_x^1 8xydy = 4x(1-x^2)1_{(0,1)}(x)$
   Allora: $f_{Y|X}(x|y) = \frac{8xy1_{(0,1)}(x)1_{(x,1)}(y)}{4x(1-x^2)1_{(0,1)}(x)} = \frac{2y1_{x,1}(y)}{1-x^2}$
   Allora:
   $E[Y|X = x] = \int_x^1 \frac{2y^2}{1-x^2}dy = \frac{2(1+x^2+x)}{3(1+x)}$

2. Trovare $E[XY|X = x]$.
   $E[XY|X = x] = \int_{-\infty}^{+\infty} xyf_{Y|X}dy = \int_x^1 \frac{2xy^2}{1-x^2}dy = \frac{2x(1-x^3)}{3(1-x^2)}$

3. Trovare $Var(Y|X = x)$.
   $Var(Y|X = x) = E[Y^2|X = x] - (E[Y|X = x])^2$
   $E[Y^2|X = x] = \int_{-\infty}^{+\infty} y^2 f_{Y|X}(y|x)dy = \int_x^1 \frac{2y^3}{1-x^2}dy = \frac{1}{2}(1+x^2)$
   Allora:
   $Var(Y|X = x) = \frac{1-x^4}{2(1-x^2)} - \frac{4(1-x^3)^2}{9(1-x^2)^2}1_{(0,1)}(x) = \frac{(-1+x^2)(1+4x+x^2)}{18(1+x)^2}$

Esercizio 2.
Siano X, Y v.a. con densità congiunta:
$f_{X,Y}(x,y) = 2 \cdot 1_{(0,y)}(x)1_{(0,1)}(y)$

1.
$$E[XY] = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xyf_{X,Y}(x,y)dxdy = \int_0^1\int_0^y 2xydxdy = \int_0^1 y^3dy = \frac{1}{4}$$

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} 2\cdot 1_{(0,y)}(x)1_{(0,1)}(y)dy = \int_0^1 2\cdot 1_{(0,y)}(x)dy = 1_{(0,1)}(x)\int_x^1 2dy = (2-2x)1_{(0,1)}(x)$$

$$E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)dx = \int_0^1 x(2-2x)dx = \frac{1}{3}$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} 2 \cdot 1_{(0,y)}(x)1_{(0,1)}(y)dx = 1_{(0,1)}(y)\int_0^y 2dx = 2y \cdot 1_{(0,1)}(y)$$

$$E[Y] = \int_0^1 2y^2 dy = \frac{2}{3}$$

$$Cov[X,Y] = E[XY] - E[X]E[Y] = \frac{1}{4} - \frac{1}{3}\frac{2}{3} = \frac{1}{36}$$

2.
$$f_{Y|X} = \frac{f_{X,Y}}{f_X}$$

$$f_{Y|X} = \frac{2 \cdot 1_{(0,y)}(x)1_{(0,1)}(y)}{(2-2x)1_{(0,1)}(x)} = \frac{1_{(x,1)}(y)}{(1-x)}$$

per $x \in (0,1)$

Esercizio 3.

Siano X, Y v.a. con densità congiunta data da:
$f_{X,Y}(x,y) = e^{-y}(1-e^{-x})1_{(0,y)}(x)1_{[0,+\infty)}(y) + e^{-x}(1-e^{-y})1_{(0,x)}(y)1_{[0,+\infty)}(x)$
Calcolare:

1. Le marginali.

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)dy = 1_{(0,+\infty)}(x)\left\{\int_x^{+\infty} e^{-y}(1-e^{-x}dy) + \int_0^x e^{-x}(1-e^{-y})dy\right\} =$$

$= xe^{-x}1_{(0,+\infty)}(x)$

Per simmetria si ha $f_Y(y) = ye^{-y}1_{(0,+\infty)}(y)$

2. $E[X], E[Y]$.
   Sempre per simmetria si ha $E[X] = E[Y]$
   $E[Y] = \int_0^\infty x^2 e^{-x} dx = 2$

3. $Var(X), Var(Y)$.
   Per simmetria $Var(X) = Var(Y)$
   $Var(X) = E[X^2] - E[X]^2$
   $E[X^2] = \int_0^{+\infty} x^3 e^{-x} dx = 6$

4. Il coefficiente di correlazione $\rho(X, Y)$.

   $\rho(X,Y) = \frac{E[XY]-E[X]E[Y]}{\sigma_x \sigma_y}$
   $E[XY] = \int_0^{+\infty}\int_0^y xye^{-y}(1-e^{-x})dxdy + \int_0^{+\infty}\int_0^x xye^{-x}(1-e^{-y})dxdy = \int_0^{+\infty} y^3 e^{-y} dy + \int_0^{+\infty} 2y^2 e^{-2y} dy + \int_0^{+\infty} 2ye^{-2y} dy - 2\int_0^{+\infty} ye^{-y} dy = 5$
   Allora:
   $\rho(X,Y) = \frac{5-4}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = 1/2$

Esercizio 4.

Si lanciano tre monete. Sia X il numero di esiti Testa per le prime due monete e Y il numero di esiti Croce per le ultime due.

1. Trovate la distribuzione congiunta di X e Y .
   Siano X_1, X_2, X_3, v.a. t.c. valgono 1 se esce T con probabilità 1/2 e 0 se esce C con probabilità 1/2.
   Quindi possiamo riscrivere le variabili X ed Y come:
   $X = X_1 + X_2$, $Y = 2 - X_2 - X_3$

   $P(X = 0) = P(X_1 + X_2 = 0) = P(X_1 = 0, X_2 = 0) =$
   $= P(X_1 = 0)P(X_2 = 0) = 1/2 \cdot 1/2 = 1/4$

   $P(X = 1) = P(X_1 + X_2 = 1) = P(X_1 = 0)P(X_2 = 1) +$
   $P(X_1 = 1)P(X_2 = 0) = 1/4 + 1/4 = 1/2$

   $P(X = 2) = P(X_1 + X_2 = 2) = P(X_1 = 1)P(X_2 = 1) = 1/2 \cdot 1/2 =$
   $1/4$

In maniera analoga si calcola che:
$P(Y = 0) = 1/4$; $P(Y = 1) = 1/2$; $P(Y = 2) = 1/4$

Allora le probabilità cercate sono:

$$\begin{array}{ccc} P(X=0,Y=0)=0 & P(X=0,Y=1)=1/8 & P(X=0,Y=2)=1/8 \\ P(X=1,Y=0)=1/8 & P(X=1,Y=1)=1/4 & P(X=1,Y=2)=1/8 \\ P(X=2,Y=0)=1/8 & P(X=2,Y=1)=1/8 & P(X=2,Y=2)=0 \end{array}$$

2. Trovate la distribuzione condizionata di Y dato X = 1.

$P(Y = 0|X = 1) = \frac{P(Y=0,X=1)}{P(X=1)} = \frac{1/8}{1/2} = 1/4$
$P(Y = 1|X = 1) = \frac{P(Y=1,X=1)}{P(X=1)} = \frac{1/4}{1/2} = 1/2$
$P(Y = 2|X = 1) = \frac{P(Y=2,X=1)}{P(X=1)} = \frac{1/8}{1/2} = 1/4$

3. Trovate la Cov(X,Y).

$Cov(X, Y) = E[XY] - E[X]E[Y]$
$E[X] = E[X_1 + X_2] = E[X_1] + E[X_2] = 1/2 + 1/2 = 1$
$E[Y] = E[2 - X_2 - X_3] = 2 - E[X_2] - E[X_3] = 2 - 1/2 - 1/2 = 1$
$E[XY] = 1/4 + 2 \cdot 1/8 + 2 \cdot 1/8 = 3/4$
$Cov(X, Y) = 3/4 - 1 = -1/4$